Антонио Грамши

АЛГЕБРА РИТМОВ

Часть 1

Введение

“Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi” (музыка – это тайное арифметическое упражнение души, которая вычисляет, сама того не зная). Прошло почти 300 лет с тех пор как Лейбниц, один из основоположников математического анализа и старший современник Баха, написал эти великие слова в письме Гольдбаху, однако они за это время не потеряли очарования и актуальности. Напротив, в результате многочисленных исследований была выявлена способность человеческого мозга неосознанно подмечать математические закономерности в окружающем нас мире, в том числе в услышанной музыке. Зачастую эта способность работает и в обратном направлении, то есть выявляется в процессе музыкального творчества. Поэтому многие композиторы осознанно, а иногда и неосознанно использовали в своих произведениях тонкие математические принципы: золотое сечение, операции симметрии и многое другое.

По-видимому, самый математический объект в музыке – это ритм, ее “скелет”. Мы займемся математическим анализом музыкальных ритмов в связи с более общей проблемой восприятия времени и предложим некоторые алгоритмы для генерирования и преобразования ритмов, которые, возможно, заинтересуют композиторов и математиков. Мы надеемся, что и музыканты-исполнители найдут для себя в этом материале много интересного.

Дадим в первую очередь строгие определения понятиям, с которыми нам придется иметь дело. Возможно, эти определения окажутся не самыми удачными и не будут совпадать с общепринятыми, но, по крайней мере, у читателя не возникнет недоразумений.

1. Основные понятия

Ритмическим рисунком будем называть любую, начинающуюся с цифры 1, конечную или потенциально бесконечную последовательность, состоящую из единиц и нулей. Музыкальный смысл этого определения состоит в том, что единице соответствует звуковой сигнал, а нулю - пауза. Каждый член последовательности находится в определенной *позиции*, соответствующей временному промежутку дискретного времени. Каждый промежуток равен условной временной единице, или *моменту*. Это так называемое *позиционное* представление ритмического рисунка. Название “позиционная” выбрано из-за аналогии с позиционной системой счисления. Действительно, ритмы, записанные в позиционной записи, можно трактовать как натуральные числа, записанные в двоичной системе. В дальнейшем вместо “позиции” будем использовать термин “разряд”, по аналогии с обычной арифметикой. Запись ритмического рисунка будем заключать в квадратные скобки, например: [1000101010001111].

Первому сигналу и только ему в ритмическом рисунке придается особое значение. Будем считать его *акцентированным сигналом*. Все остальные сигналы будем считать не акцентированными. В музыкальной практике акцентированность сигнала (ноты или удара) выражается его более громким, по сравнению с остальными сигналами, звучанием. Внутренние акценты, то есть акцентированные сигналы внутри ритмического рисунка, пока рассматриваться не будут – мы займемся ими позже в специальном разделе.

Разновидности позиционной нотации ритмических рисунков часто используются в школах этнической перкуссии. При этом сигнал обычно обозначается буквой, а пауза – прочерком. Иногда удобно использовать так называемую *модульную* разновидность позиционной записи. Сущность этого подхода лучше всего показать на примере. Вновь рассмотрим ритмический рисунок [1000101010001111]. Разобьем его на четыре равные части (модули), которые будем отделять друг от друга точками: [1000.1010.1000.1111]. Теперь расположим каждый модуль вертикально, в виде столбика (квадратные скобки пока писать не будем). В результате получим следующую запись нашего ритмического рисунка:

1	1	1	1
O	O	O	1
O	1	O	1
O	O	O	1

Сигналы и паузы в каждом столбике считываются в направлении сверху вниз, а сами столбики считываются слева направо. Можно рассматривать каждый столбик как основную долю ритмического рисунка. В нашем случае их четыре. Первая доля содержит один сигнал, вторая – два, третья – снова один, четвертая – четыре сигнала. Так как сигналы в пределах каждой доли распределены равномерно, то нули в столбиках можно вообще не использовать, а высоту каждого столбика сократить в $\frac{4}{n}$ раз, где n – число сигналов в столбике. В результате получим следующую компактную запись:

1	1	1	1
	1		1
			1
			1

Такое двухмерное представление ритмического рисунка оказывается чрезвычайно удобным в преподавании ритмики – ритмы и композиции, записанные в модульном виде, ученики осваивают намного быстрее, чем в классической нотации.

Другой подход, тесно связанный с предыдущим, заключается в том, чтобы ритмический рисунок представлять как начинающуюся с единицы строго возрастающую последовательность натуральных чисел. Музыкальный смысл такой записи состоит в том, что каждому числу в последовательности соответствует порядковый номер того момента на дискретной шкале времени, в который производится сигнал. Данное представление ритмического рисунка будем называть *координатным* (каждому моменту соответствует координата на временной оси). Представим вышеприведенный ритмический рисунок [1000101010001111] в координатном виде, причем числа, соответствующие координатам, будем отделять друг от друга точками. Получим: [1.5.7.9.13.14.15.16]. Исходя из этой записи, нельзя понять, сколько всего разрядов содержит ритмический рисунок[1]. Поэтому общее число разрядов обязательно нужно указать, например, в виде нижнего индекса. Таким образом, корректная запись предыдущего ритмического рисунка будет выглядеть следующим образом: $[1.5.7.9.13.14.15.16]_{16}$.

И, наконец, третий подход состоит в представлении ритмического рисунка в виде последовательности натуральных чисел, причем каждое число

[1] Так как в соответствующей позиционной записи после последней единицы может стоять цепочка из нулей произвольной длины.

соответствует длине отрезка дискретного времени от одного сигнала (включая момент, когда он производится) до следующего (не включая этот момент). Такое представление будем называть *геометрическим*, поскольку на первый план выступают длины временных отрезков. Например, вышеприведенный ритмический рисунок [1000101010001111] в геометрическом виде будет выглядеть следующим образом: [4,2,2,4,1,1,1,1]. Числа, соответствующие длительностям сигналов, будем отделять друг от друга запятыми. Отметим, что классическая нотная запись является по своей сути геометрической. В геометрической записи числа, соответствующие временным отрезкам между сигналами, мы будем называть *длительностями сигналов*, хотя мы продолжаем считать сигналы точечными событиями, длящимися ровно одну единицу условного времени.

Абсолютное время в разрабатываемой нами теории чаще всего не играет никакой роли – нас интересуют только соотношения длин временных отрезков. Поэтому мы можем умножить длительность каждого сигнала в геометрической записи на любое фиксированное натуральное число - ритмический рисунок, в сущности, останется прежним. В соответствующей позиционной записи при этом появятся дополнительные нули. Например, вместо [4,2,2,4,1,1,1,1] мы могли бы написать [8,4,4,8,2,2,2,2] или [16,8,8,16,4,4,4,4] и т. д. Для удобства ритмический рисунок в геометрическом представлении лучше записывать в виде последовательности взаимно простых чисел, хотя это и не принципиально. В дальнейшем мы будем различать равенство ритмических рисунков и ритмов в расширенном смысле, то есть с точностью до коэффициента пропорциональности, которое назовем *эквивалентностью* (будем для него использовать знак тильды “~”), и строгое равенство (для которого будем использовать обычный знак равенства).

Разные виды записи будут отображать также и разные подходы к представлению о восприятии времени. Для практических целей мы будем использовать, в основном, позиционную и геометрическую запись. Читатель без труда различит их: в позиционной записи нет запятых, а в геометрической они есть. Координатная запись, неудобная в практических приложениях, понадобится нам только в одном теоретическом рассуждении о восприятии времени, а также при рассмотрении некоторых бинарных операций над ритмами, тесно связанных с аналогичными операциями в теории множеств.

Бесконечное (многократное) повторение одного и того же ритмического рисунка порождает собственно *ритм.* Важное свойство ритма состоит в том, что он имеет определенное начало, а именно ритмический рисунок, исполняемый первым. Запись ритма мы будем заключать в тактовые черты. Например, ритмический рисунок [2,1.1] порождает ритм [2,1,1],[2,1,1],[2,1,1]… = |2,1,1|.

В нашей теории понятия ритма и бесконечного ритмического рисунка не равнозначны. Например, в ритме |2,1,1| каждый (1+3*n*)-й сигнал (где *n*=0,1,2,3..) - акцентированный, а в бесконечном ритмическом рисунке [2,1,1,2,1,1,2,1,1,…] акцентированным является только первый сигнал.

Мы будем различать разные варианты *вырожденного* ритма: |1|, |1,1|, |1,1,1|,… Ритм |1| будем называть *простым вырожденным.* В качестве особого объекта можно выделить *пустой ритм*, который не содержит ни сигналов, ни пауз. Порождающий его ритмический период длится 0 единиц условного времени, следовательно, столько же длится и соответствующий ритм. Пустой ритм – это своеобразный аналог обычного нуля или пустого множества. Пустой ритм будем обозначать как |θ| (перечеркнутый ноль). Таким образом, множество всевозможных ритмов можно разбить на подмножество *непустых* ритмов (начинающихся с сигнала) и пустой ритм. Теоретически допустим ритм, состоящий из одной паузы, то есть |0|, но, оказывается, он создает значительные неудобства при разработке математических операций над ритмами и, кроме того, не является ни непустым, ни пустым. Поэтому мы его рассматривать не будем.

Скорее всего, ритмы воспринимаются нами геометрически: при этом мы сравниваем между собой временные отрезки между сигналами, а не фиксируем их пассивно на “встроенной в мозг” временной оси. Координатное представление может послужить основой для феноменологической модели первичного восприятия времени. В этом случае координаты соответствуют величине, которую можно назвать *яркостью* сигнала. В каждый момент времени мы воспринимаем все предыдущие сигналы в виде единого множества. Поскольку все они имеют разную яркость, мы способны упорядочить их на воображаемой временной оси. Первичное ощущение времени возникает в результате суперпозиции и соответствующей “голографической” обработки, по крайней мере, двух сигналов различной яркости. Подобный механизм лежит в основе стереоскопического зрения: здесь тоже происходит суперпозиция с последующей “голографической” обработкой двух различных зрительных образов, получаемых от правого и левого глаза. Еще раз подчеркнем, что описанная нами модель является именно феноменологической: мы не знаем, что происходит на самом деле, но абстрактная модель может помочь нам приблизиться к такому пониманию.

А теперь перейдем к описанию некоторых алгоритмов генерирования новых ритмов с помощью различных операций над исходными ритмами. Мы давно пытались на основе ритмов создать структуры, аналогичные алгебраическим объектам – группам и кольцам. Основная проблема, с которой пришлось столкнуться – это сохранение музыкального смысла в полученных таким образом структурах: слушатель не только должен осознавать логически, но и “слышать” те преобразования, которые происходят с исходными ритмами. Насколько авторам удалось достичь поставленной задачи, судить читателю.

Мы будем рассматривать два класса ритмов – с одним типом сигнала и с двумя. Первый класс был подробно рассмотрен выше. Будем называть ритмы из этого класса *однопараметрическими* (единственный параметр – временная координата сигнала).

Во втором классе имеются сигналы уже двух типов – *низкий* и *высокий* (например, низкий и высокий звук на барабане). Будем обозначать сигналы так же, как и раньше, но подчеркивание числа (и в позиционной, и в геометрической записи) будет означать, что сигнал – низкий. Например, в ритме $|\underline{2},1,1|$ первый длинный сигнал – низкий, последние два коротких – высокие. Понятно, что низкий и высокий сигналы – это частные случаи тональной системы, в которой высота сигнала связывается с определенной нотой. Поэтому будем также называть ритмы с двумя типами сигнала *двухпараметрическими* (первый параметр – временная координата сигнала, второй параметр – его высота). В принципе, разрабатываемую нами теорию можно обобщить для класса ритмов с произвольным количеством типов сигнала, но мы пока ограничимся вышеуказанными двумя.

2. Операции над ритмами

2.1. Унарные операции над ритмами

Унарная операция, или *оператор*, ставит в соответствие каждому элементу некоторого множества элемент этого же множества (другой или тот же самый). В случае, когда речь идет о действительных (или комплексных) числах, вместо оператора обычно употребляется понятие *функции*.

Прежде всего рассмотрим девять унарных операций, или операторов, над ритмами, из которых первые три широко используются в музыкальной композиции. В ритме, полученном в результате применения оператора, акцентированным будет также только первый сигнал, независимо от типа оператора.

2.1.1. Ракоход

Первая из операций – *ракоход* (или *разворот*). Она сводится к исполнению исходного ритма в обратном порядке. Это определение ракохода распространяется и на случай ритмов с двумя типами сигналов. Будем обозначать этот оператор буквой *c* (от лат. *cancer* – рак). Например, ракоход от ритма |$\underline{4}$,2,2,$\underline{4}$,1,1,1,1| есть ритм |1,1,1,1,$\underline{4}$,2,2,$\underline{4}$|, т. е. *c*(|$\underline{4}$,2,2,$\underline{4}$,1,1,1,1|) = |1,1,1,1,$\underline{4}$,2,2,$\underline{4}$|. Очевидно, повторное применение ракохода к данному ритму сводится к тождественному преобразованию, при котором ритм остается неизменным. Ракоходы от ритмов, записанных в геометрическом и позиционном виде, будут отличаться друг от друга, но несложно доказать, что они переходят один в другой при циклической перестановке знаков. Для определенности будем рассматривать ракоходы от ритмов, записанных в геометрическом виде. Очевидно, что ракоход можно представить себе как зеркальное отражение записи ритма относительно вертикальной оси, проходящей через середину ритма. Если ритм при применении операции ракохода меняется, как в приведенном выше примере, то он называется *полярным*, в противном случае он называется *неполярным*. Например, неполярным является ритм |$\underline{4}$,2,2,$\underline{4}$|. Очевидно, что все неполярные ритмы, и только они, имеют симметричную геометрическую запись.

2.1.2. Обращение

Вторым оператором является *обращение*. Этот оператор имеет смысл только для ритмов с двумя типами сигнала. Обращение состоит в замене низкого сигнала на высокий и наоборот. Будем обозначать этот ритм буквой r (от лат. *rivoltatio* – перевертывание). Например, ритм |<u>4,</u>2,2,<u>4,</u>1,1,1,1| при обращении преобразуется в следующий: |4,<u>2,2,</u>4,<u>1,1,1,1</u>|. Так же как и в случае ракохода, повторное применение обращения сводится к тождественному преобразованию. Аналог операции обращения в физике, а частности, в кристаллографии – *антисимметрия*, или, в более общем виде, *цветная симметрия*.

Из операций ракохода, обращения и их суперпозиции (последовательного выполнения ракохода и обращения или наоборот[2]) легко построить абелеву (коммутативную) группу преобразований над множеством R всевозможных ритмов, которую будем обозначать как Q_R. Групповая (бинарная) операция состоит в последовательном выполнении (суперпозиции) двух преобразований (унарных операций) над данным ритмом. Роль единицы играет тождественное преобразование. Таблица Кэли для группы Q_R будет следующей:

	e	*c*	*r*	*cr*
e	*e*	*c*	*r*	*cr*
c	*c*	*e*	*cr*	*r*
r	*r*	*cr*	*e*	*c*
cr	*cr*	*r*	*c*	*e*

Здесь e - тождественное преобразование. Очевидно, что группа Q_R изоморфна диэдрической группе порядка 4, D_2. В этой группе, в отличие от циклической группы порядка 4, все элементы, отличные от единичного, e, имеют порядок, равный 2.

Несложно убедиться, что ракоход и обращение – линейные операции. Это означает, что применение этих операций к растянутым ритмам сводится к их применению к исходным, нерастянутым ритмам с последующим растягиванием. Иными словами, $f(kR)=k(f(R))$, где f – оператор (ракоход или обращение), R – исходный ритм, k – коэффициент растяжения.

[2] Очевидно, что операции ракохода и обращения перестановочны.

2.1.3. Инверсия

Унарная операция, называемая *инверсией* ритма, сводится к преобразованию долгих сигналов в короткие, а коротких – в длинные. Инверсия легко распространяется на случай ритмов с двумя типами сигналов. Будем обозначать этот оператор буквой i (от лат. *inversio* - перестановка). При этом в геометрической записи ритма R=|a,b,...c| ищется максимально долгий сигнал длительности m. Инверсией ритма R будет следующий ритм $i(R)$= |m+1-a,m+1-b,…m+1-c|. Например, инверсией ритма R=|$\underline{4}$,2,2,$\underline{4}$,1,1,1,1| станет ритм $i(R)$=|$\underline{4}$+$\underline{1}$-$\underline{4}$,4+1-2,4+1-2,$\underline{4}$+$\underline{1}$-$\underline{4}$,4+1-1,4+1-1,4+1-1,4+1-1|=|$\underline{1}$,3,3,$\underline{1}$,4,4,4,4|.

Хотя этот оператор не является линейным, с предыдущими операторами инверсию роднит то обстоятельство, что его повторное применение тоже сводится к тождественному преобразованию. Поэтому на основе всех этих трех операторов мы можем построить новую диэдрическую абелеву группу G_R порядка 8. Выпишем ее таблицу Кэли:

	e	*c*	*r*	*cr*	*i*	*ci*	*ri*	*cri*
e	*e*	*c*	*r*	*cr*	*i*	*ci*	*ri*	*cri*
c	*c*	*e*	*cr*	*r*	*ci*	*i*	*cri*	*ri*
r	*r*	*cr*	*e*	*c*	*ri*	*cri*	*i*	*ci*
cr	*cr*	*r*	*c*	*e*	*cri*	*ri*	*ci*	*i*
i	*i*	*ci*	*ri*	*cri*	*e*	*c*	*r*	*cr*
ci	*ci*	*i*	*cri*	*ri*	*c*	*e*	*cr*	*r*
ri	*ri*	*cri*	*i*	*ci*	*r*	*cr*	*e*	*c*
cri	*cri*	*ri*	*ci*	*i*	*cr*	*r*	*c*	*e*

Очевидно, что группа Q_R является нормальным делителем группы G_R. Соответствующая фактор-группа G/Q изоморфна циклической группе порядка 2.

Можно разработать и другие унарные операции, которые вместе с вышеописанными операциями будут образовывать диэдрические группы более высоких порядков (в общем случае порядок группы D_n равен 2^n).

2.1.4. Сдвиг

Операция *сдвига* состоит в циклической перестановке чисел в геометрической записи ритма: при этом первое число ставится в конец записи. Будем обозначать эту операцию буквой t (от лат. *translatio* – перенос). Например, $t(|\underline{2},1,1|)=|1,1,\underline{2}|$. Сдвиг также распространяется на случай ритмов с двумя типами сигналов. Очевидно, что сдвиг является линейным оператором. Его музыкальный смысл состоит в том, что начало (и соответствующий акцент) смещается на второй сигнал исходного ритма. Если мы последовательно применим операцию однократного сдвига к исходному ритму два раза, то получим двукратный сдвиг, t^2. В частности, $t^2(|\underline{2},1,1|)=t(t(|\underline{2},1,1|))=t(|1,1,\underline{2}|)=|1,\underline{2},1|$. В общем случае мы можем рассматривать n-кратный сдвиг. Очевидно, $t^n(R)=R$, если n равно числу сигналов в ритме R. Поэтому любой ритм R с n сигналами порождает циклическую группу, состоящую из n образующих, причем $t^0=e$, то есть нулевой сдвиг (тождественное преобразование) является в этой группе нейтральным элементом, а суперпозиция (последовательное выполнение) сдвигов – групповой операцией. Приведенный выше ритм порождает группу по сдвигу, состоящую из трех элементов: $t^0=e$, $t^1=t$, t^2.

2.1.5. Смягчение и заострение

Теперь перейдем к двум противоположным друг другу “нелинейным” операциям - *смягчению* и *заострению* ритмов. Смягчение состоит в прибавлении единицы к длительности каждого сигнала в геометрической записи ритма. Приведем пример. Возьмем неоднократно использованный нами ритм $|\underline{4},2,2,\underline{4},1,1,1,1|$. Применяя операцию смягчения, получим ритм $|\underline{5},3,3,\underline{5},2,2,2,2|$. Этот ритм звучит аналогично исходному, но как бы в “смягченном” варианте, поскольку теперь сигналы распределены несколько более равномерно. Если мы применим операцию к этому новому ритму, получим еще более “смягченный” ритм. Продолжая применять операцию и дальше, очевидно, в пределе мы получим ритм, состоящий из равномерной последовательности сигналов, то есть вырожденный ритм. Мы можем смягчать ритм как угодно мало, предварительно умножая длительности каждого сигнала на произвольное натуральное число. Как несложно убедиться, с помощью операции смягчения можно превратить пунктирный ритм |3,1| в пунктирно-триольный |2,1|, который широко используется в блюзе и джазе.

Операция заострения ритмов, противоположная смягчению, состоит в вычитании единицы из длительности каждого сигнала ритма; при этом минимальное число в геометрической записи ритма должно превосходить единицу. Рассмотрим снова ритм |4,2,2,4,1,1,1,1|. Поскольку запись ритма содержит единицы, умножим предварительно каждое число, например, на 2. Получим "растянутую" запись того же самого ритма: |8,4,4,8,2,2,2,2|. Теперь мы можем применить операцию заострения, вычитая из каждого числа по единице. Получим ритм |7,3,3,7,1,1,1,1|. Этот ритм тоже будет восприниматься как подобный исходному, но, по сравнению с ним, будет иметь несколько более "острый" характер, так как здесь сигналы будут распределены менее равномерно. Если мы будем применять операцию заострения и дальше, то в пределе также получим вырожденный ритм, но характер стремления к пределу здесь будет совершенно иным. Как и в случае операции смягчения, мы можем заострять ритм как угодно мало, предварительно умножая каждое число в его записи на произвольное натуральное число.

Очевидно, что операции смягчения и заострения не являются линейными. Кроме того, они распространяются на случай ритмов с двумя типами сигналов.

Операции смягчения и заострения можно определить в общем виде, задавая два числа: k и m. Первое число, k, является коэффициентом, на которое нужно предварительно умножить длительности сигналов исходного ритма, то есть растянуть его геометрическую запись в k раз. Растягивая исходный ритм R в k раз, получаем ритм R'. Второе число, m, прибавляется (в случае смягчения) или вычитается (в случае заострения) из каждого числа геометрической записи ритма R'. В случае заострения нужно следить, чтобы каждое из чисел ритма R' было больше числа m.

2.1.6. Дифференцирование и интегрирование ритмов

Разумеется, речь не идет о дифференцировании и интегрировании в общепринятом смысле. Но, хотя ритм является дискретным объектом, мы вправе задаться вопросом: можно ли изменения, происходящие в одном ритме R, характеризовать с помощью другого ритма R'? И, наоборот, можно ли по данному ритму R' найти другой ритм R, изменения в котором характеризуются ритмом R'? Первая задача, применительно к непрерывным функциям, решается с помощью дифференцирования, вторая – с помощью интегрирования. Чтобы не придумывать новых терминов, мы также будем пользоваться этими понятиями, хотя и с оговоркой, что речь идет лишь об отдаленной аналогии. Дифференцирование и интегрирование ритмов – это тоже унарные операции, хотя и несколько необычные. Они имеют смысл только для однопараметрических ритмов.

Прежде всего, введем ряд необходимых предварительных понятий. Ритмический период, если он имеет достаточную протяженность, в большинстве случаев можно разбить на отдельные фрагменты, каждый из которых воспринимается как единое целое. Назовем такие фрагменты *ритмическими модулями* (музыканты часто выделяют начало каждого модуля небольшим акцентом). Это понятие достаточно субъективное, поскольку, в зависимости от музыкального опыта, протяженность модуля может оказываться разной для разных категорий слушателей. Для наших целей мы ограничимся изучением модулей, имеющих одинаковое количество разрядов. Разбиение на модули такого рода возможно, если количество разрядов в ритме – составное число. Условимся записывать модули в виде столбика и читать их сверху вниз. Например, разделяя ритм R=|1000101010001111| на 8 модулей, состоящих из двух сигналов, получим следующую запись, которую можно интерпретировать как матрицу S_2 (2-число строк в матрице):

1	O	1	1	1	O	1	1
O	O	O	O	O	O	1	1

Если мы увеличим количество сигналов в модуле до четырех, то получим следующую матрицу S_4:

1	1	1	1
O	O	O	1
O	1	O	1
O	O	O	1

Увеличив количество сигналов в модуле до восьми, получаем следующую матрицу S_8:

1	1
O	O
O	O
O	O
1	1
O	1
1	1
O	1

И, наконец, увеличив модуль до 16-ти сигналов, получим предельный случай – матрицу S_{16}:

1
O
O
O
1
O
1
O
1
O
O
O
1
1
1
1

Очевидно, если мы транспонируем эту матрицу, то получим исходную запись ритма, записанную в виде матрицы 1x16, S_1:

1	O	O	O	1	O	1	O	1	O	O	O	1	1	1	1

Теперь сделаем следующее преобразование для строк всех получившихся матриц: оставляя первый знак в строке, и, двигаясь слева направо, будем выписывать только новые знаки, пропуская повторяющиеся. Например, матрица S_4 превратится в следующий объект, который для простоты будем называть неполной матрицей:

1			
O			1
O	1	O	1
O			1

Поскольку в каждой строке происходит правильное чередование цифр, мы можем, оставляя первую цифру в строке, заменить остальные на нейтральный знак, например на крестик “x”. Матрица примет следующий вид:

1			
O			X
O	X	X	X
O			X

Теперь преобразуем первый столбец, рассматривая его в направлении сверху вниз, точно так же, как мы только что преобразовывали строки. Получим следующую неполную матрицу:

1			
X			X
	X	X	X
			X

Поскольку и так понятно, что в ячейке матрицы в левом верхнем углу будет находиться 1 (любой ритм начинается с сигнала), мы можем и в ней поместить крестик. В результате получим следующую матрицу:

X			
X			X
	X	X	X
			X

Теперь заменим крестики единицами, а в пустые ячейки впишем нули. Окончательно получим следующую, уже настоящую матрицу:

1	0	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Назовем такую матрицу *характеристической матрицей первого порядка* для данного разбиения ритма на модули и будем обозначать ее как S_4' (нижний индекс по-прежнему указывает число строк в матрице и, следовательно, тип разбиения на модули), а ритм, ей соответствующий (в нашем случае это |1100001000100111|=|1,5,4,3,1,1,1|) – *производной первого порядка* по разбиению на модули 4х4. Будем обозначать его, так же как и в случае настоящих производных, буквой R со штрихом, то есть R_4' (здесь нижний индекс тоже указывает тип разбиения на модули). Мы можем рассматривать полученный ритм R_4' =|1100001000100111| как исходный и задаться целью, найти ритм, для которого он является производной. Тогда, проделывая преобразования в обратном порядке, мы снова получим ритм R=|1000101010001111|, который назовем интегралом от ритма R_4'. Будем обозначать его обычным знаком интеграла: $R=\int R_4'$. Еще раз подчеркнем, что, как в случае производной, так и в случае интеграла, нужно указать конкретный способ разбиения на модули.

Вернемся к ритму R=|1000101010001111|.

Найдем его характеристические матрицы, соответствующие остальным типам разбиений. Выпишем в порядке возрастания числа строк все получившиеся матрицы, включая только что разобранный случай матрицы 4х4.

Матрица S_1':

1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0

Матрица S_2':

1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0

Матрица S_4':

1	0	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Матрица S_8':

1	0
1	0
0	0
0	0
1	0
1	1
1	0
1	1

Матрица S_{16}':

1
1
0
0
1
1
1
1
1
1
0
0
1
0
0
0

Теперь подсчитаем для каждой характеристической матрицы число единиц, которая она содержит, и разделим его на число сигналов в исходном ритме. Назовем получившуюся величину *мерой сложности* характеристической матрицы и будем обозначать ее как L. Для матрицы S_1' L=9/8, для матрицы S_2' L=7/8, для матрицы S_4' L=7/8, для матрицы S_8' L=8/8=1 и, наконец, для матрицы S_{16}' L=9/8. Итак, мера сложности минимальна для матрицы S_2' и S_4'.

При этом в матрице S_4' сумма числа строк и столбцов, которая равна 4+4=8, меньше аналогичной суммы для матрицы S_2', где она равна 2+8=10. Иными словами, матрица S_4' еще более компактна, чем матрица S_2'. Интересно, что и соответствующее матрице S_4 разбиение на модули оказывается самым естественным, причем неясно, что в данном случае важнее для удобства восприятия ритма – квадратная форма матрицы (при этом получается небольшое число сравнительно коротких модулей) или ее минимальная мера сложности. Назовем такого рода матрицы *оптимальными*. Разумеется, основываясь только на этом единичном примере, нельзя утверждать, что человеческий мозг стремится воспринимать ритмы в наиболее компактном виде, пытаясь задействовать как можно меньше “информационных ячеек” (подобно архивированию файлов в компьютерах). Для более глубокого изучения этой проблемы нужно тщательно проанализировать, как воспринимают разнообразные короткие ритмы разные категории слушателей. В любом случае, характеристическая матрица первого порядка в какой-то мере характеризует сложность ритмов, в чем автор неоднократно убеждался в процессе в своей многолетней музыкально-педагогической деятельности.

Рассмотрим теперь следующий ритм: |1010010110100101|. Число сигналов в нем равно 8. Построим его характеристическую матрицу S_4'. Получим:

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

Число знаков в этой матрице максимально, а именно 16, что в два раза превышает число сигналов исходного ритма, то есть мера его сложности *L*=16/8=2. Значит, рассматривая разбиение этого ритма на четыре модуля по четыре разряда, мы получим очень сложный ритм. Посмотрим, что будет получаться для других разбиений.

Матрица S_1'

1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1

содержит 13 единиц.

Матрица S_2'

1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0

содержит уже только 8 единиц.

Матрица $S_8^{'}$

1	0
1	0
1	0
1	0
0	0
1	0
1	0
1	0

содержит всего лишь семь единиц. Действительно, во втором столбце сигналы полностью исчезают ввиду того, что вторая половина ритма повторяет первую (если не учитывать наличие акцента в первом сигнале).

Матрицу $S_{16}^{'}$ мы рассматривать не будем, поскольку она получается путем транспонирования матрицы $S_1^{'}$, которую мы уже рассматривали.

Получается, что разбиение исходного ритма на два модуля из 8-ми разрядов – оптимально для данного ритма.

Вернемся к рассмотрению характеристической матрицы $S_4^{'}$ только что рассмотренного ритма:

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

Теперь произведем над ней те же преобразования, которые мы производили над матрицей S_4, чтобы получить матрицу $S_4^{'}$. Получим матрицу:

1	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Назовем ее *характеристической матрицей второго порядка* ритма |101001011010010 1| по данному разбиению и будем обозначать ее как S_4''. Соответствующий ритм |1000000000000000|=|16|~|1| будем называть *второй производной* ритма R=|1010010110100101| и обозначать его как R_4''. В нашем конкретном случае R_4'' является вырожденным ритмом, хотя исходный ритм R имел довольно сложную структуру. Стоит ли учитывать это обстоятельство при поиске оптимального разбиения на модули? Автор пока не может ответить на этот вопрос. В любом случае, нет сомнений, что характеристические матрицы второго порядка (а, возможно, и высших порядков) несут важную информацию о структуре ритма (так же, как вторые производные – о функциях).

Теперь допустим, что, наоборот, нам нужно для ритма R_4'' найти ритм R, для которого R_4'' являлся бы второй производной. Тогда, проделывая преобразования матрицы S_4'' в обратном порядке, мы получили бы ритм R, который можно назвать повторным интегралом второго порядка от ритма R_4'', то есть $R=\int(\int R_4'')$ (не путать с двойным интегралом!).

Аналогичным образом можно вычислить производные и повторные интегралы более высоких порядков. Легко доказать, что для любого конечного ритма при данном разбиении на модули число производных разных порядков конечно и в точности равно числу соответствующих повторных интегралов.

Пусть даны два достаточно коротких ритмических рисунка A и B, имеющих одинаковое количество основных долей (или, попросту, одинаковую временную протяженность). Обозначим соответствующие им оптимальные матрицы как $S^{\mathrm{opt}}(A)$ и $S^{\mathrm{opt}}(B)$. Меры сложности соответствующих им характеристических матриц обозначим как $L(A)$ и $L(B)$. Сыграем подряд эти рисунки. Оказывается, что, если $L(A) > L(B)$, то рисунок B будет казаться несколько замедленным по сравнению с A, а если $L(A) < L(B)$, то B, наоборот, будет казаться ускоренным по сравнению с A. Эта разница в ощущении скорости будет тем сильнее, чем больше различаются меры сложности рисунков A и B. Выражаясь более образно, можно сказать, что если в данном временном отрезке сосредоточено больше информации, то сознание стремится как бы расширить его, чтобы воспринять лучше содержащуюся в нем информацию. Приведем простейший пример. Сыграем ритм R=|1010101011111111|. Практически любой слушатель скажет, что он воспринимает его как состоящий из чередующихся фрагментов - ритмических рисунков *M*=[10101010] и *P*=[11111111]. Каждый из этих рисунков является фрагментом простого вырожденного ритма |1|. Но, поскольку в ритме *R* соединяются фрагменты простого вырожденного ритма, исполняемого в двух разных темпах, то рисунок *M* будет восприниматься уже не как фрагмент ритма |1|, а как фрагмент более сложного ритма |10|. Поэтому при переходе от фрагмента *M* к фрагменту *P* музыкально неподготовленный человек будет слышать небольшое замедление, поскольку фрагмент *P*, несмотря на то, что состоит из большего количества сигналов, имеет оптимальную матрицу меньшей меры сложности. Это обстоятельство хорошо известно учителям музыки: начинающие ученики, исполняя после медленных (но сложно организованных в ритмическом отношении) фрагментов простые пассажи, не представляющие для них технической сложности (например, гаммообразные), часто играют их в “скомканном” виде, то есть быстрее, чем нужно. С приобретением музыкального опыта субъективное течение времени постепенно приближается к объективному.

Мы разобрали простейшие случаи деления ритмических рисунков на модули. На самом деле, модули могут иметь разную длину. Хотя именно такие разбиения чаще всего встречаются в профессиональной музыке, мы не будем их анализировать ввиду сложности подобного анализа.